Zadania z Matematyki II dla studentów I – go roku studiów stacjonarnych (Ekonomia)

Zestaw 1

1. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągów:

a) $a_n = n^2 + 3n + 1$, b) $b_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$, c) $c_n = \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1}$,

d) $d_n = 2^{\frac{n-1}{n+1}}$, e) $e_n = (n-1)2^n$, f) $g_n = \sqrt{1 - 3n + 2n^2}$.

2. Piąty wyraz ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n}{2n + a}$ jest równy $\frac{5}{3}$. Obliczyć a, zbadać monotoniczność ciągu i sprawdzić, które wyrazy tego ciągu są większe od 1,6.

3. Obliczyć granice ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{n + 2}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^4 + 3}$, c) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4 - 2n^3}{2n^4 - 1}$, d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 5n} \right)^3$,

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{2 \cdot 9^n + 3^n}$, f) $\lim_{n\to\infty} (n^2 - \sqrt{n^4 + 5n^2})$, g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

4. Liczby 1, $\log_2 5$, $\log_{\sqrt{2}} x$ tworzą ciąg arytmetyczny. Obliczyć x.

5. Korzystając z twierdzenia Stolza obliczyć granice:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2}{n^3}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$, $a > 1$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2 + 4 + \ldots + 2^n}{4 + 16 + \ldots + 4^n}$, d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

6. Obliczyć granice ciągów:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + 3^n + \pi^n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{5^n + 9^n}}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n-1}\right)^{2n-2}$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{4-n}$,

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+6}{n-1}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4n+4}\right)^{n+2}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

7. Dla jakiej wartości k granica ciągu $a_n = \frac{5n - 3}{kn + 1}$ istnieje i jest równa $\sqrt{5}$? Zbadać monotoniczność tego ciągu dla otrzymanej wartości parametru.