

Zadania z Matematyki II dla studentów I – go roku studiów niestacjonarnych
na kierunku Ekonomia

Zestaw 1

1. Wyznacz i przedstaw geometrycznie dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_{x-1} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

b) $f(x) = \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x}$;

c) $r(x) = \frac{3 \ln x + 2}{\ln x - 1}$;

d) $r(x) = \frac{x}{\arctg x - \frac{\pi}{4}}$;

e) $g(x) = e^{\frac{2x+2}{x}}$;

f) $f(x) = \arcsin(x^2 + 1)$

2. Dane są funkcje $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \frac{1}{\arctg x}$, $u(x) = \sin x$. Wyznaczyć superpozycje

$f(g(x))$, $h(u(x))$, $g(f(x))$, $h(f(x))$, $g(h(x))$, $f(g(h(x)))$, $h(g(f(x)))$, $f(u(u(g(x))))$.

3. Z jakich funkcji elementarnych składają się następujące funkcje złożone:

a) $f(g(x)) = (\cos 2x - 1)^5$,

b) $f(g(h(x))) = \frac{2}{\sqrt{\sin x + 1}}$,

c) $f(g(h(x))) = \operatorname{tg} 2^{3x-5}$,

d) $f(g(h(u(x)))) = \sqrt[3]{\ln \sin(x-1)}$,

e) $f(g(h(u(x)))) = 2^{\sin^2 5x}$.

4. Wyznaczyć funkcje odwrotne do:

a) $y = 3x - 2$,

b) $y = \sqrt{x+3} - 1$,

c) $y = x^2 - 2x + 3$,

d) $y = 4^{x-1}$,

e) $y = 3^{2x+3} - 5$,

f) $y = \ln x + 2$,

g) $y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$,

h) $y = \sin^2 x - 1$,

i) $y = \log_2 \cos(x+3)$.

5. Wyznaczyć granice (przy $x \rightarrow \infty$): $\lim \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+2)(x-1)}$, $\lim \frac{(x^2+1)(x-2)}{x^4 + 3x^2 - 1}$, $\lim \left(\frac{4x-2}{2x+1} \right)^3$, $\lim \frac{3^x - 1}{3^x}$

, $\lim \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$, $\lim \left(\frac{x-4}{x} \right)^x$, $\lim \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^x$, $\lim (\sqrt{x^2+2} - x)$, $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2x-1)}{2+4+6+\dots+2x}$.

6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^x + 4^x + 7^x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3^x + 5^x}{7^x + 4^x}}$.

7. Wyznacz granice na końcach określoności funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$;

b) $g(x) = \arctg \frac{1}{x-1}$;

c) $h(x) = \frac{x}{\arctg x}$.

8. Zbadać ciągłość funkcji: a) $f(x) = \operatorname{tg} x$,

b) $g(x) = \frac{\cos x}{x}$,

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$,

b) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x-2} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$.

9. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 7$, b) $g(x) = \frac{1}{x^2}$, c) $h(x) = \sqrt{x+1}$.

10. Obliczyć pochodne funkcji: $y = \sin^2 x + \sin x^3$, $y = (2x^2 + 1 - \sqrt{x}) \operatorname{ctg} x$, $y = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x}$,

$y = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x + 1}$, $y = (x^2 + 3x - \cos x)^5$, $y = e^{\sin x}$, $y = \operatorname{arctg} \sin 2x$, $y = \sin^2(x^3 + e^x)$,

$y = \operatorname{arctg} \ln \cos x$, $y = \sin^2 \ln \left(3^{\frac{1}{x}} + 1 \right)$, $y = \ln(x + \sqrt{ax-1})$, $y = x^4 4^x$, $y = x^x$, $y = (\sin x)^{\cos x}$,

$y = x^{\frac{1}{x}}$, $y = x^{\ln x}$.

11. Korzystając z reguły De l'Hospitala wyznaczyć granice: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{x-1} - 1}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^2}$.

12. Napisz równanie stycznej (lub stycznych) do krzywej

a) $y = \sin 2x$ w p-cie $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

b) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ i równoległej do prostej $y = 5x + 3$,

13. Wyznacz kąt przecięcia się stycznych z zadania 8 c.

14. Wyznaczyć kąt przecięcia się krzywych:

a) $y = -0,5x^2 + 4$ i $x + y = 4$,

b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$.

15. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, b) $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$, c) $g(x) = \frac{x^2}{x-3}$,

d) $k(x) = x^2 e^x$, e) $r(x) = e^{x^3 - 6x^2}$, f) $t(x) = x \ln x$,

e) $s(x) = \cos 3x + 6x$

16. Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji:

a) $f(x) = \ln(9 - x^2) + 1$, b) $g(x) = \frac{1}{x}$, c) $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$.

d) $k(x) = x^2 e^x$.

17. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$, b) $k(x) = x^2 e^x$, c) $t(x) = x \ln x$.

18. Wyznaczyć różniczki funkcji:

a) $y = \operatorname{tg}^2(2^x - 1)$, b) $y = \ln \cos x \cdot (e^{3x} - 2x)$.

19. Wykorzystując pojęcie różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość:

a) $\ln 1,02$, b) $\sqrt[3]{28}$, c) $\sqrt[4]{15}$.