Zadania z Matematyki II dla studentów I – go roku studiów stacjonarnych (Ekonomia)

Zestaw 11

1. Dla podanych funkcji i warunków wyznaczyć ekstrema warunkowe:

a) $f(x,\ y) = 2x - y$, $x^2 - 2y^2 = 3$;

b) $f(x,\ y) = x^2 - y^2 - 3xy$, $5x - 3y = 2$;

c) $f(x,\ y) = x^2 - y^2$, $x^2 - 2y^2 = 3$;

d) $f(x,\ y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y$, $x^2 + y^2 = 1$.

2. Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji $f(x, y) = 3x - 4y + 2$ określonej na zbiorze:

a) $C_1 = \{(x,\ y):\ 3x^2 + 2y^2 \le 11\}$;

b) $C_2 = \{(x, y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ x + y \le 10\}$.

3. Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji $f(x, y) = xy$ określonej na zbiorze:

a) $D_1 = \{(x,\ y):\ x^2 + 2y^2 \le 4\}$;

b) $D_2 = \{(x, y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ x + y \le 4\}$.

4. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym zbiorze:

$f(x,\ y) = 2x^2 - 2y^2$, $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$;

$f(x,\ y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $B = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$.

5. Na paraboli $y^2 = 4x$ wyznacz punkt położony najbliżej prostej $x - y + 4 = 0$.

6. Koszt produkcji *x* jednostek produktu *A* oraz *y* jednostek produktu *B* dany jest wzorem

$$K(x,\ y) = 100 + 3x^2 + 5y^2.$$

Możliwości produkcyjne są takie, że można wytworzyć razem 75 jednostek obu produktów. Jaka produkcja minimalizuje koszty?

7. Funkcja użyteczności zakupu dana jest wzorem $U(x,\ y) = 2\ln x + \ln y$. Ograniczenie budżetowe ma postać $2x + 4y = 50$. Wyznaczyć poziom zakupów maksymalizujący funkcję użyteczności.

8. Pudełko o kwadratowej podstawie ma objętość $12500\ \mathrm{cm}^3$. Jakie powinny być wymiary pudełka, jeśli powierzchnia materiału użytego do jego wyprodukowania ma być minimalna w przypadku gdy:

a) pudełko ma wszystkie 6 ścianek;

b) pudełko nie ma wierzchniej ścianki.