Zadania z matematyki dla studentów I – go roku studiów zaocznych

na kierunku ekonomia

Zestaw 2

1. Dane są macierze: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&0\\2&-1&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&2&-3\\0&3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]_{3\times3}$, gdzie $c_{ij}=i+j$,

$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&-3\\0&2\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$. Wyznaczyć:

a) $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$ b) $\mathbf{B}\circ\mathbf{A}$ c) $\mathbf{C}\circ(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ d) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}\circ\mathbf{C})^T$ e) $2(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^T-\mathbf{C}$

f) $\mathbf{A}\circ\mathbf{D}$ g) $\mathbf{E}\circ\mathbf{E}^T$ h) $\mathbf{D}^T\circ2\mathbf{B}\circ\mathbf{E}$ i) $\mathbf{D}\circ\mathbf{D}^T$ j) $\mathbf{D}^T\circ\mathbf{D}$

k) $\mathbf{E}^T\circ\mathbf{C}\circ\mathbf{E}$ l) $\mathbf{D}^T\circ(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ ł) $\mathbf{E}^T\circ\mathbf{E}\circ(\mathbf{A}+\mathbf{C})$

2. Wyznaczyć macierz $\mathbf{A^3}-3(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^T+\mathbf{B^2}+2\mathbf{I}$ dla $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&3\end{bmatrix}$.

3. Rozwiąż równanie $\begin{bmatrix}x&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&2&x\\1&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1\\x\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$.

4. Obliczyć $\mathbf{A}^T+3\mathbf{B}$ dla macierzy: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&4&0&-3\\2&0&-1&1\\3&2&1&5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{3\times4}, b_{ij}=\begin{cases}3i+2j & \text{dla } i>j\\ i-j & \text{dla } i=j\\ i\cdot j & \text{dla } i<j\end{cases}$.

5. Znaleźć wszystkie macierze **B**, dla których $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\mathbf{B}\circ\mathbf{A}$, jeżeli $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&4\end{bmatrix}$.

6. Wyznaczyć symetryczną macierz **B** i skośnosymetryczną macierz **C**, aby zachodziła równość $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ dla $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$.

7. Rozwiązać równania:

a) $5\mathbf{A}-\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=3\mathbf{A}-\begin{bmatrix}5&2\\6&1\end{bmatrix}$, b) $(2\mathbf{X})^T+\left[\begin{bmatrix}-1&0\\3&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}\right]^T=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix}1&2&-3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}-1&0&3\end{bmatrix}^T+10\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}^T\circ\begin{bmatrix}-1&3&5\\0&4&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix}$.

8. Oblicz ślad macierzy $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$ jeżeli $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

9. **A** , **B** i **C** są nieosobliwymi macierzami kwadratowymi tego samego stopnia. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy **X**, **Y** i **Z** jeżeli:

$\mathbf{X}=\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$, $\mathbf{Y}=\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C}^2$.

10. Sprawdzić $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\circ\mathbf{A}^T$ dla macierzy: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&5&4\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&2&-2\\3&0&-3&4\\-4&3&-3&2\end{bmatrix}$.

11. Metodą operacji elementarnych na wierszach znaleźć macierze odwrotne do:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&4\\0&0&7&0\\0&5&0&0\\2&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&2&5&1\\1&0&1&-3\\2&2&4&2\end{bmatrix}.$$

12. Wykorzystując operacje elementarne na wierszach wyznaczyć elementy macierzy **X** spełniającej równanie:

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}2&1\\-5&-2\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}\circ\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}\circ\begin{bmatrix}2&1\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}\circ\begin{bmatrix}1&3&4\\1&4&5\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&2&0\end{bmatrix}.$$

13. Jeżeli $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$ obliczyć macierz:

$\mathbf{C}=\left(\mathbf{A^T}\circ\mathbf{A}\right)^{-1}\circ\mathbf{B^T}\circ\left[\mathbf{B}\circ\left(\mathbf{A^T}\circ\mathbf{A}\right)^{-1}\circ\mathbf{B^T}\right]^{-1}$; **X** jeżeli $(\mathbf{A}\circ\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\circ(\mathbf{B^{-1}}\circ\mathbf{A})^{\mathbf{-1}}\circ\mathbf{B}=\mathbf{A^{-1}}$.

14. Wyznacz macierz **X** przy założeniu, że macierze **A**, **B**, **C** i **D** są nieosobliwe:

$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C}\circ\mathbf{X}\circ\mathbf{D}=\mathbf{E}$, $\mathbf{A}\circ\mathbf{B^2}\circ\mathbf{X}\circ\mathbf{C}=\mathbf{D}$, $\mathbf{A^{-2}}\circ\mathbf{X}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C}^3=\mathbf{D}$, $\left(\mathbf{X^T}\circ\mathbf{X}\right)^{\mathbf{-1}}\circ\mathbf{X}=\mathbf{A}$.

15. Dla macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&-1\\4&5\end{bmatrix}$ rozwiąż równanie

$\left(\mathbf{X}\circ\mathbf{A}+\mathbf{X}\circ\mathbf{B^{-1}}\circ\mathbf{A}\right)\circ\mathbf{A^{-1}}\circ\mathbf{B}=\mathbf{A}$.

16. Zapisać układ równań dany w postaci macierzowej $\mathbf{A}\circ\mathbf{X}=\mathbf{B}$ jeżeli:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&4\\1&0&-3\\-1&1&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}5\\3\\-2\end{bmatrix}.$$

17. Wykorzystując pojęcie macierzy odwrotnej rozwiąż układ równań: $\begin{cases}x+2y+3z=5\\x+3y+7z=6\\x+y=4\end{cases}$.

18. Znajdź obrazy punktów $x^1=(0,0,0)$, $x^2=(1,2,3)$, $x^3=(2,-1,0)$ w przekształceniu liniowym zadanym macierzą $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-2&1&3\end{bmatrix}$.

19. Dla jakich wartości parametru a obrazem punktu $\mathbf{x}=(a,a,1)$ jest punkt **b** = (–2, 1, –6) w przekształceniu liniowym opisanym macierzą $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\a&1&1\\2&3&a\end{bmatrix}$?

20. Oblicz liczbę inwersji w permutacjach: (*n*, *n-1*, *n*-2, ..., 2, 1);
(2, 4, 6, ... , 2*n*, 1, 3, 5, ... , 2*n*+1); (2, 1, 4, 3, 6, 5, ..., 2*n*, 2*n* –1);
(*n*, *n-1*, *n-2*, ..., *k*, *1*, *2*, ..., *k-1*) dla *n*>*k*.

21. Które z podanych iloczynów są składnikami wyznaczników macierzy odpowiednich stopni i z jakim znakiem wchodzą do tych wyznaczników? a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

b) $a_{23}a_{51}a_{32}a_{14}a_{45}$; c) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}$; d) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$

22. Dobierz wartości parametrów k i m tak, aby iloczyn $a_{14}a_{2k}a_{31}a_{4m}a_{52}a_{63}$ był składnikiem wyznacznika macierzy stopnia szóstego, poprzedzonym znakiem minus.

23. Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&4&1\\1&0&1\\3&1&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix}$$

24. Rozwiąż równania: $\begin{vmatrix}x&x\\1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x\\x&x\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}x+1&x&2x-1\\1&x&1\\2&x&x\end{vmatrix}=0$.

25. Sprawdź metodą Sarrusa własności wyznacznika: a) $\det\alpha\,\mathbf{A}=\alpha^3\det\mathbf{A}$,
b) $\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\det\mathbf{A}$.

26. Dane są macierze trzeciego stopnia, których wyznaczniki wynoszą: $\det\mathbf{A}=4, \det\mathbf{B}=3$.
Ile wynosi wyznacznik: a) $\det(2\mathbf{A}\circ\mathbf{B}^T)$, b) $\det(\mathbf{A}^{-1}\circ 2\mathbf{B}^{-1})$?

27. Stosując rozwinięcie Laplace'a oblicz wyznaczniki macierzy:

a) $\begin{vmatrix}1&1&5&2\\4&0&2&3\\-2&2&1&4\\0&1&3&2\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}2&-1&1&1\\1&1&4&2\\1&2&3&3\\-2&4&5&1\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}2&1&4&3&5\\3&4&0&5&0\\3&4&5&2&1\\1&5&2&4&3\\4&6&0&7&0\end{vmatrix}$.

28. Obliczyć wyznaczniki macierzy:

a) $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{nn}$, gdzie $a_{ij}=|i+j|$, b) $\mathbf{B}=[b_{ij}]_{nn}$, gdzie $b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{dla } i=j\\ 2 & \text{dla } i\neq j\end{cases}$.

29. Obliczyć wyznaczniki macierzy: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&0&3&1\\0&3&1&2\\1&2&0&4\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&0&2&3\\1&1&0&2\\2&3&4&1\\2&1&3&4\end{bmatrix}$, a następnie ustalić wartość wyznacznika macierzy **C,** jeżeli $\mathbf{C}=(3\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}^{-1}$.

30. Metodą wyznacznikową znajdź macierze odwrotne do macierzy:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&-2\\3&1&0\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$.

31. Dla jakiej wartości x macierz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&4&4\\x+1&2&x+3&4\\1&x+3&x+4&x+5\\1&-3&-4&-5\end{bmatrix}$ jest nieosobliwa?

32. Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5-x^2&2&3&4\\2&3&5-x^2&1\\2&3&4&1\end{vmatrix}=0$, b) $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{vmatrix}=0$.