Zadania z Matematyki II dla studentów I – go roku studiów zaocznych
na kierunku ekonomia
Zestaw 2

1. Wyznaczyć i przedstawić geometrycznie dziedzinę funkcji:
   a) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{y-x}}$; b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$; c) $f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$;
   d) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y)$; e) $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-9)(4-x^2-y^2)}$.
2. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji:
   a) $f(x,y)=2x^3+3x^2y-5xy^3+y^4$; b) $f(x,y,z)=x^2yz^3-xz^4+2xy^2+y^3z^2+3z^3$;
   c) $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{xy}$; d) $f(x,y)=\ln(x)\sin y$;
   e) $f(x,y,z)=x^y-z^x$.
3. Obliczyć gradient funkcji w podanych punktach:
   a) $f(x,y)=e^{2x}y^2$, $x^1=(1,-1)$;
   b) $f(x,y)=(x-2)^2+(y-4)^2$, $x^1=(3,5)$.
4. Obliczyć pochodną cząstkową:
   a) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}$ funkcji $f(x,y)=xe^{-y}$; b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ funkcji $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^3}{z}$.
5. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y,z)=\dfrac{y\sqrt{x}}{z}$ w punkcie (1,4,2).
6. Wyznaczyć pochodną funkcji:
   a) $f(x,y)=\sin x\cos y$ w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$ w kierunku wektora $a=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
   b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $(0,1)$ w kierunku $a=(1,-2)$.
7. Wyznaczyć różniczkę zupełną funkcji $f(x,y)=\sin 2x\cdot\cos 3y$ w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$.
8. Wyznaczyć różniczkę drugiego rzędu dla funkcji:
   a) $f(x,y,z)=x^3-2xyz^2+yz^3-z^4$; b) $g(x,y)=x\cdot\ln y$; c) $h(x,y,z)=\dfrac{xy}{z^2}$.
9. Wykorzystując pojęcie różniczki obliczyć:
   a) przybliżoną wartość funkcji $f(x,y)=xe^y$ w punkcie (0,91; 0,03);
   b) przybliżoną wartość wyrażenia $1{,}94^2\ln 1{,}03$;
   c) przybliżoną wartość przyrostu funkcji $f(x,y)=x\,arctg\,y$ jeżeli x zmienia się od 2 do 2,1, a y od 3 do 2,5.
10. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:
   a) $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+5$, b) $f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x+4y-5$,
   c) $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$, d) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$.