Zadania z Matematyki I dla studentów I – go roku studiów stacjonarnych (Ekonomia)

Zestaw 5

1. Udowodnij twierdzenia:

a) $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A}^{-1}$, b) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

2. Metodą operacji elementarnych na wierszach znaleźć macierze odwrotne do:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 7 & 5\\ 2 & -2 & 6\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 3 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & 5 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2n-1\end{bmatrix}.$$

3. Wykorzystując operacje elementarne na wierszach wyznaczyć elementy macierzy $\mathbf{X}$ spełniającej równanie:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}\circ\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -3 & -4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}\circ\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}\circ\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{bmatrix}.$$

4. Wyznaczyć rzędy macierzy:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 7 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 5 & 3\\ -2 & 2 & 3 & -4\end{bmatrix}.$$

5. Wiedząc, że **A**, **B**, **C** są nieosobliwe wyznacz **X** z równań:

a) $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{X}=\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$, b) $(\mathbf{X}-\mathbf{A}^{-1})\circ\mathbf{A}=\mathbf{C}$, c) $(\mathbf{X}+\mathbf{A})\circ\mathbf{B}^{-1}-\mathbf{C}=\mathbf{B}$,

d) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\circ(\mathbf{X}\circ\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}+\mathbf{X}\circ(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\circ\mathbf{X})^{-1}-(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\circ\mathbf{X})^{-1}\circ\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$.

6. Dla macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ znajdź macierz **X** spełniającą równania:

a) $(\mathbf{A}\circ\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{A})^{-1}\circ\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$,

b) $\mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{A})^{-1}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{X}\circ(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\circ\mathbf{X})^{-1}\circ\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\circ\mathbf{X}\circ\mathbf{A}=\mathbf{B}$,

c) $\mathbf{B}\circ\mathbf{A}^{-1}\circ(\mathbf{A}\circ\mathbf{X}+\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{X})=\mathbf{B}$,

d) $(\mathbf{X}\circ\mathbf{A}+\mathbf{X}\circ\mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A})\circ\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{B}=\mathbf{A}$.

7. Znajdź przeciwobraz punktu $\mathbf{b}=(2,0,-1)$ w przekształceniu liniowym zadanym macierzą $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 7 & 3\end{bmatrix}$.