

Zestaw 6

1. Zbadać liczbę inwersji w permutacjach:

- a) $(3, 4, \dots, n-1, n, 1, 2)$,
 b) $(1, 2, \dots, k, n, n-1, \dots, k+1)$, $n > k$,
 c) $(3, 4, \dots, n-1, n, 2, 1)$,
 d) $(n, n-1, n-2, \dots, k, 1, 2, \dots, k-1)$, $n > k$,
 e) $(1, 2, n, n-1, \dots, 4, 3)$,
 f) $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots, 2n, 2n-1)$.

2. Sprawdź, czy podane iloczyny są składnikami wyznacznika stopnia piątego:

- a) $a_{32} \cdot a_{45} \cdot a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{51}$,
 b) $a_{32} \cdot a_{45} \cdot a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{51}$,
 c) $a_{32} \cdot a_{45} \cdot a_{13} \cdot a_{34} \cdot a_{51}$.

3. Oblicz wartość składnika $w = a_{14} \cdot a_{2k} \cdot a_{31} \cdot a_{4m} \cdot a_{52}$ wyznacznika stopnia piątego macierzy, której elementy są określone wzorem $a_{ij} = \cos(ij \cdot \frac{\pi}{4})$, wiedząc, że permutacja indeksów kolumn jest parzysta.

4. Ustal wartość i znak, z jakim wejdzie do wyznacznika jego składnik

$$a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{35} \cdot \dots \cdot a_{(n-2)n} \cdot a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}$$

dla macierzy stopnia n , której elementy są określone wzorem $a_{ij} = \frac{j}{i+1}$.

5. Ustal wartość i znak, z jakim wejdzie do wyznacznika jego składnik

$$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)n} \cdot a_{n(n-1)}$$

dla macierzy stopnia n , której elementy są zadane wzorem $a_{ij} = \log_2 2^{j^i}$ i $n = 2k$.

6. Rozwiąż równania i nierówności:

- a) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$,
 b) $\begin{vmatrix} 5^x & 1 \\ 2 & 2^{x+1} \end{vmatrix} = 0$,
 c) $\begin{vmatrix} \log_3 x & 1 \\ 2\log_3 x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

7. Rozwiąż równania:

- a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & x & 7 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$,
 b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^{x^2} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,
 $\begin{vmatrix} x+1 & x & 2x-1 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0$.

8. Ustalić dla jakich wartości $x \det(3\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^{-1}) \geq 0$, dla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3x-3 & x+5 & x+2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 2x+3 & 2x+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Wiedząc, że $\det \mathbf{A} = 4$ i $\det \mathbf{B} = 2$ oraz $\det(3\mathbf{A} \circ 2\mathbf{B}^{-1}) = 2592$, ustal stopień macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} .

10. Dane są macierze trzeciego stopnia, których wyznaczniki wynoszą: $\det \mathbf{A} = 4$, $\det \mathbf{B} = 5$. Ile wynosi wyznacznik: a) $\det(4\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^T)$, b) $\det(\mathbf{A}^T \circ 3\mathbf{B}^{-1})$?