

Zestaw 6

1. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\arcsin(x - 3)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + 5x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\log_3(1 + 2x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{4\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^x - 5}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^{(x-3)^2} - 1}{(x - 3)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5^{2(x-3)} - 1}{x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}.$$

2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$\text{a) } f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 1, \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^2}{x - 3}, \quad \text{c) } h(x) = 2x^2 - \ln x,$$

$$\text{d) } s(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}, \quad \text{e) } r(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad \text{f) } w(x) = x^2 \ln x.$$

3. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$\text{a) } f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4, \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^2}{x - 3}, \quad \text{c) } h(x) = \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{d) } s(x) = e^{-x^2}, \quad \text{e) } r(x) = |\ln x|, \quad \text{f) } f(x) = \ln(9 - x^2) + 1.$$

4. Zbadać, czy funkcja $f(x) = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ w otoczeniu punktów $x = 1$ i $x = 3$ jest wypukła czy wklęsła.

5. Dla podanych funkcji wpływów i kosztów wyznaczyć taką wielkość produkcji q , która maksymalizuje zysk. Jaka jest wtedy wielkość zysku?

$$\text{a) } W(q) = 100q, \quad K(q) = q^3 - 3q^2 + 2q;$$

$$\text{b) } W(q) = 500q - q^2, \quad K(q) = q^3 - 50q^2 + 500q + 250.$$

6. Firma określiła, że tygodniowy popyt na jej wyroby określony jest wzorem $D(p) = -3p + 300$ (p – cena wyrobu). Jaką cenę powinna wyznaczyć firma na swój produkt, aby zmaksymalizować wpływy? (Wskazówka: $W(p) = p \cdot D(p)$).