Zadania z Matematyki I dla studentów I – go roku studiów stacjonarnych (Ekonomia)

Zestaw 7

1. Stosując rozwinięcie Laplace'a oblicz wyznaczniki macierzy:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Obliczyć wyznaczniki macierzy: a) $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{nn}$, gdzie $a_{ij} = |i - j|$,

b) $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{nn}$, gdzie $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 2 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$, c) $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{nn}$, gdzie $c_{ij} = \max_i \{i, j\}$.

3. Obliczyć $\det(4\mathbf{A}^T \circ \mathbf{B}^{-1})$ dla macierzy: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Metodą wyznacznikową znajdź macierze odwrotne do macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Dla jakiej wartości k macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2k+1 & k+2 & 2 & 5 \\ 2k+2 & 2k+2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & k & k \\ k & 1 & 1 & 1+\log k \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa?

6. Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-x^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$.